

不動産鑑定士

経済学

経済数学入門レジュメ

数学知識に自信のない方は、
基本講義受講の前に必ず本講義
を受講して下さい。

REAL
ESTATE
APPRAISER

はじめに

経済数学入門講義の目的は、経済学基本講義を受講する上で、また、経済学の計算問題を解くために最低限必要な、基礎的な数学知識を確認していくことです。具体的には、面積の計算、分数の計算、直線の式と図示、方程式の解き方、微分の計算、偏微分の計算、指数の計算、平方根と立方根、無限等比級数を中心に学習していきます。

本講義の「基礎編」の内容を押さえているか否かで、今後皆様が受講する「経済学基本講義」の理解に、大きく差が出ることと思われます。特に基礎的な数学に不安のある方は、今後困ることのないよう、基礎編に関してしっかりとトレーニングすることにより、確実にマスターしておきましょう。応用編に関しては、余力のある方向けの内容になっています。

本講義が、皆様の不動産鑑定士試験の合格に少しでも貢献できれば幸いです。皆様の合格を心よりお祈り申し上げます。

目次

I 基礎編

1. 面積の計算	3
2. 分数の計算	4
3. 直線の式と直線の作図	5
4. 方程式の計算	8
5. 微分の計算	15
6. 偏微分の計算	17
7. 指数の計算	19
8. 平方根と立方根	21
9. 無限等比級数の和	21

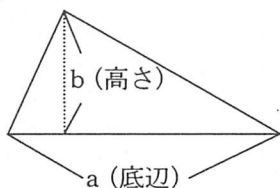
II 応用編

1. 2次方程式の因数分解による解法(x^2 の係数が1ではないケース)	23
2. 2次関数のグラフと平方完成	25
3. 絶対値と平方根	29
4. 積の微分と商の微分の公式	31
5. 合成関数の微分	32
6. 等比数列と無限等比級数	34

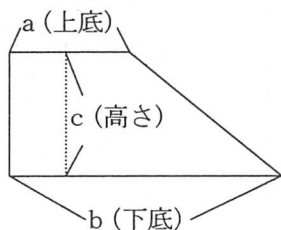
I 基礎編

1 面積の計算

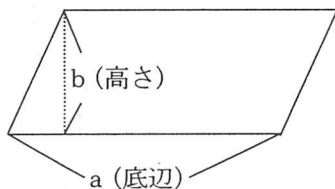
(1) 三角形の面積 = a (底辺) $\times b$ (高さ) $\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} a b$



(2) 台形の面積 = $\{a$ (上底) $+ b$ (下底) $\} \times c$ (高さ) $\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (a + b) c$



(3) 平行四辺形の面積 = a (底辺) $\times b$ (高さ) = $a b$



2	分数の計算	算術基礎 1
---	-------	--------

(1) 分数のたし算

《例》

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \quad (\text{右高}) d \times (\text{左高}) a = \text{積面の高さ} (1)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{b \times c}{a \times c} + \frac{d \times a}{c \times a} = \frac{b \ c}{a \ c} + \frac{a \ d}{a \ c} = \frac{b \ c + a \ d}{a \ c}$$

(2) 分数のひき算

《例》

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{b \times c}{a \times c} - \frac{d \times a}{c \times a} = \frac{b \ c}{a \ c} - \frac{a \ d}{a \ c} = \frac{b \ c - a \ d}{a \ c} \quad (\text{右高}) d + (\text{左高}) a = \text{積面の高さ} (2)$$

(3) 分数のかけ算

《例》

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{b \times d}{a \times c} = \frac{b \ d}{a \ c}$$

(4) 分数のわり算

《例》

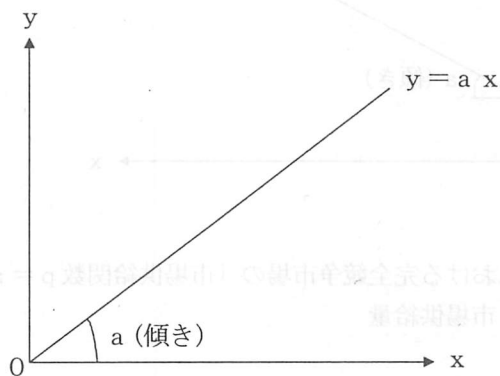
$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{a \times d} = \frac{b \ c}{a \ d}$$

3 直線の式と直線の作図

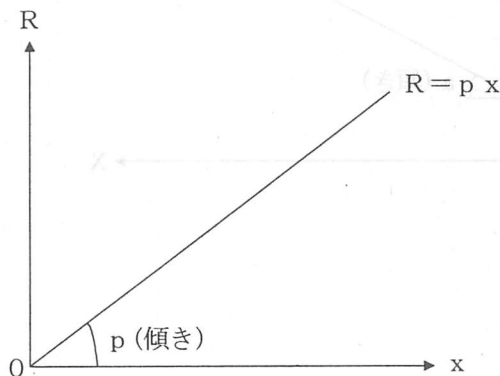
(1) 直線の式 $y = ax$ ($a > 0$) とそのグラフ

$y = ax$ ($a > 0$) は原点を通る傾きが a の右上がりの直線として図示できる。 x は独立変数と呼ばれ、グラフの横軸の変数となり、 y は従属変数と呼ばれ、グラフの縦軸の変数となる。



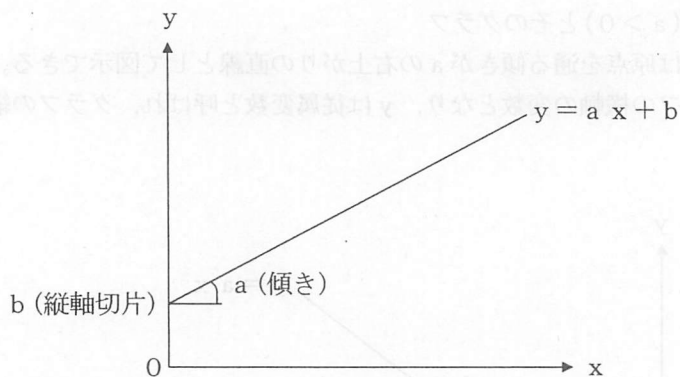
《例》 ミクロ経済学におけるプライス・テイカー企業の「収入関数 $R = px$ 」

R : 収入, p : 価格, x : 生産量



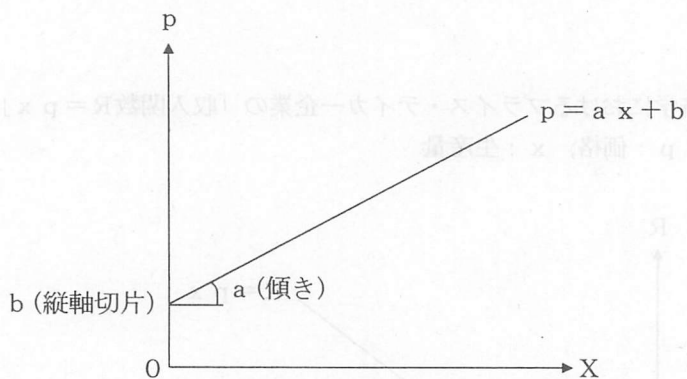
(2) 直線の式 $y = ax + b$ ($a > 0$) とそのグラフ

$y = ax + b$ ($a > 0$) は縦軸切片が b ，傾きが a の右上がりの直線として図示できる。



《例》 ミクロ経済学における完全競争市場の「市場供給関数 $p = aX + b$ 」

p : 価格, X : 市場供給量

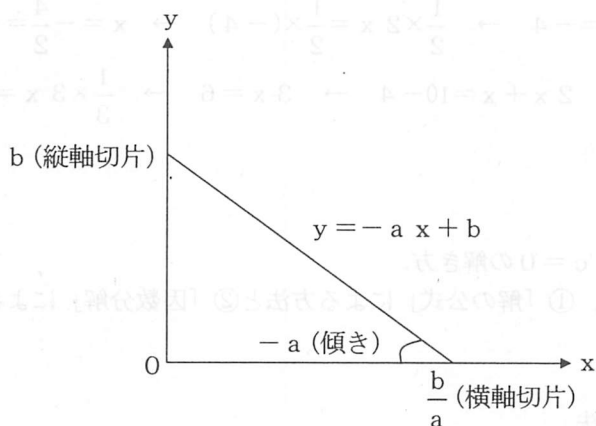


(3) 直線の式 $y = -ax + b$ ($a > 0$) とそのグラフ

$y = -ax + b$ ($a > 0$) は縦軸切片が b 、傾きが $-a$ の右下がりの直線として図示できる。なお、横軸切片は、 $0 = -ax + b \rightarrow -b = -ax \rightarrow \frac{-b}{-a} = x$

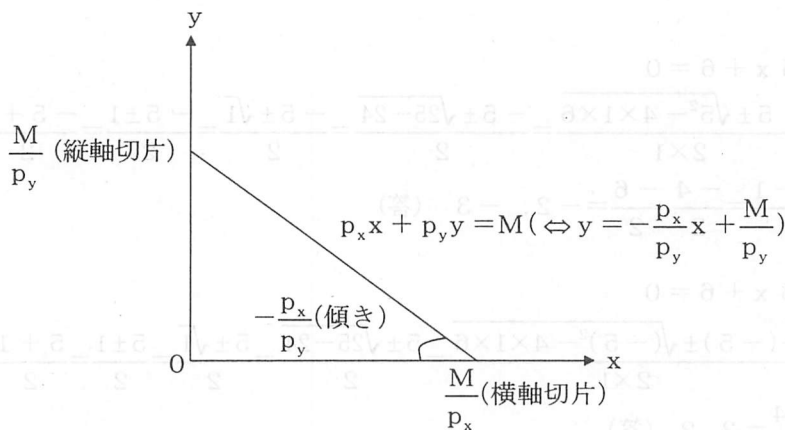
$$\rightarrow x = \frac{b}{a} \text{ (横軸切片)}$$

と求められる。



《例》 ミクロ経済学におけるプライス・テイカー消費者の「予算線 $p_x x + p_y y = M$ 」

p_x : X財価格, x : X財消費量, p_y : Y財価格, y : Y財消費量, M : 貨幣所得



4 方程式の計算

(1) 1次方程式 $ax + b = 0$ の解き方

未知数 x を定数 a, b で表すことを, 方程式を解くという。

$$ax + b = 0 \rightarrow ax = -b \rightarrow \frac{1}{a} \times ax = \frac{1}{a} \times (-b) \rightarrow x = -\frac{b}{a} \quad (\text{答})$$

$$2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow \frac{1}{2} \times 2x = \frac{1}{2} \times (-4) \rightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \quad (\text{答})$$

$$2x + 4 = -x + 10 \rightarrow 2x + x = 10 - 4 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow \frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 6$$

$$\rightarrow x = \frac{6}{3} = 2 \quad (\text{答})$$

(2) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解き方

2次方程式の解き方には, ①「解の公式」による方法と②「因数分解」による方法の2通りがある。

① 「解の公式」による方法

$ax^2 + bx + c = 0$ の解は,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

で与えられる。

《例》

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \frac{-5 + 1}{2},$$

$$\frac{-5 - 1}{2} = \frac{-4}{2}, \frac{-6}{2} = -2, -3 \quad (\text{答})$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \frac{5 + 1}{2}, \frac{5 - 1}{2}$$

$$= \frac{6}{2}, \frac{4}{2} = 3, 2 \quad (\text{答})$$

② 因数分解 (x^2 の係数が 1 の場合のみを示す)

$x^2 + (a+b)x + ab = 0$ の解は, 「かけて a b 」, 「たして $(a+b)$ 」 になるように
因数分解すると

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b) = 0 \rightarrow (x+a) = 0 \text{ または, } (x+b) = 0 \\ \rightarrow x = -a, -b \text{ となる。}$$

《例》

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = 0 \rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \\ \rightarrow (x+2) = 0 \text{ または } (x+3) = 0 \rightarrow x = -2, -3 \quad (\text{答})$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x^2 - (2+3)x + (-2) \times (-3) = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \\ \rightarrow (x-2) = 0 \text{ または } (x-3) = 0 \rightarrow x = 2, 3 \quad (\text{答})$$

【練習問題】

次の2次方程式を解きなさい。

(1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

(2) $x^2 - 4x - 8 = 0$

(3) $3x^2 - 5x - 3 = 0$

【解答】

(1) $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{2}{4}, -\frac{8}{4}$$

$$= \frac{1}{2}, -2 \quad (\text{答})$$

(2) $x^2 - 4x - 8 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{3} \quad (\text{答})$$

(3) $3x^2 - 5x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{6} \quad (\text{答})$$

(3) 連立方程式の解き方 (代入法による解き方)

$$\begin{cases} ax + by = c & \cdots \cdots \text{①} \\ dx + ey = f & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

②式より, $ey = -dx + f \rightarrow \frac{1}{e} \times ey = \frac{1}{e} \times (-dx + f) \rightarrow y = -\frac{d}{e}x + \frac{f}{e} \cdots \cdots \text{③}$

③式を①式の y に代入すると,

$$\begin{aligned} ax + b\left(-\frac{d}{e}x + \frac{f}{e}\right) &= c \rightarrow ax - \frac{bd}{e}x + \frac{bf}{e} = c \rightarrow \\ \frac{ae}{e}x - \frac{bd}{e}x + \frac{bf}{e} &= c \rightarrow \frac{ae}{e}x - \frac{bd}{e}x = c - \frac{bf}{e} \rightarrow \\ \frac{ae}{e}x - \frac{bd}{e}x &= \frac{ce}{e} - \frac{bf}{e} \rightarrow \frac{ae - bd}{e}x = \frac{ce - bf}{e} \rightarrow \\ \frac{e}{ae - bd} \times \frac{ae - bd}{e}x &= \frac{e}{ae - bd} \times \frac{ce - bf}{e} \rightarrow x = \frac{ce - bf}{ae - bd} \cdots \cdots \text{④} \end{aligned}$$

④式を③式の x に代入すると,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{d}{e} \times \frac{ce - bf}{ae - bd} + \frac{f}{e} = -\frac{d(ce - bf)}{e(ae - bd)} + \frac{f(ae - bd)}{e(ae - bd)} \\ &= \frac{-cde + bdf + aef - bdf}{e(ae - bd)} = \frac{aef - cde}{e(ae - bd)} = \frac{e(af - cd)}{e(ae - bd)} \\ &= \frac{af - cd}{ae - bd} \end{aligned}$$

が得られる。

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (\text{答})$$

《例》

$$\begin{cases} 2x + 3y = 10 & \cdots \cdots \text{①} \\ 4x + 2y = 4 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

②式より, $2y = -4x + 4 \rightarrow \frac{1}{2} \times 2y = \frac{1}{2} \times (-4x + 4) \rightarrow$

$$y = -\frac{4}{2}x + \frac{4}{2} = -2x + 2 \cdots \cdots \text{③}$$

③式を①式の y に代入すると,

$$\begin{aligned} 2x + 3(-2x + 2) &= 10 \rightarrow 2x - 6x + 6 = 10 \rightarrow -4x = 10 - 6 \rightarrow \\ -4x &= 4 \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right) \times (-4)x = \left(-\frac{1}{4}\right) \times 4 \rightarrow x = -1 \cdots \cdots \text{④} \end{aligned}$$

④式を③式の x に代入すると,

$$y = -2x + 2 = (-2) \times (-1) + 2 = 2 + 2 = 4$$

が得られる。したがって, $x = -1, y = 4$ (答)

【練習問題】

次の(1)～(3)の連立方程式を解きなさい。

$$(1) \begin{cases} x_1 = \frac{52 - x_2}{2} \\ x_2 = \frac{36 - x_1}{3} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y = M \end{cases} \quad (\text{ただし, } a, b, p_x, p_y, M \text{ は, すべて正の定数})$$

$$(3) \begin{cases} Y = 300 + \frac{1800}{P} \\ Y = 100P \end{cases} \quad (\text{ただし, } Y, P \text{ は, 正の値をとるものとする})$$

(4) 次の連立方程式を, Y, r, e について解きなさい。ただし, Y : 国民所得, r : 利子率, e : 邦貨建て為替レートとする。

$$\begin{cases} r = -0.04Y + 0.1e + 10 & \cdots \cdots \text{⑪} \quad (\text{IS 曲線}) \\ r = 0.02Y - 8 & \cdots \cdots \text{⑫} \quad (\text{LM 曲線}) \\ r = 0.01Y - 0.05e + 3 & \cdots \cdots \text{⑬} \quad (\text{BP 曲線}) \end{cases}$$

【解答】

$$(1) \begin{cases} x_1 = \frac{52 - x_2}{2} & \cdots \cdots \text{①} \\ x_2 = \frac{36 - x_1}{3} & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

②式を①式に代入

$$x_1 = 26 - \frac{1}{2} \times \frac{36 - x_1}{3} = 20 + \frac{1}{6} x_1$$

$$\frac{5}{6} x_1 = 20$$

$$\therefore x_1 = 24 \quad (\text{答})$$

$x_1 = 24$ を②式に代入

$$x_2 = 4 \quad (\text{答})$$

$$(2) \begin{cases} \frac{a}{b} \frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} & \dots\dots ③ \\ p_x x + p_y y = M & \dots\dots ④ \end{cases}$$

③式を変形すると、

$$a p_y y = b p_x x$$

$$\therefore y = \frac{b p_x}{a p_y} x \quad \dots\dots ⑤$$

を得る。

⑤式を④式に代入

$$p_x x + p_y y = p_x x + p_y \frac{b p_x}{a p_y} x = \left(1 + \frac{b}{a}\right) p_x x$$

$$= \frac{a+b}{a} p_x x = M$$

$$\therefore x = \frac{a M}{(a+b) p_x} \quad (\text{答}) \quad \dots\dots ⑥$$

⑥式を⑤式に代入

$$y = \frac{b p_x}{a p_y} \times \frac{a M}{(a+b) p_x} = \frac{b M}{(a+b) p_y}$$

$$\therefore y = \frac{b M}{(a+b) p_y} \quad (\text{答})$$

$$(3) \begin{cases} Y = 300 + \frac{1800}{P} & \dots\dots ⑦ \\ Y = 100 P & \dots\dots ⑧ \end{cases}$$

⑦式および⑧式より、

$$300 + \frac{1800}{P} = 100 P$$

$$\therefore 300 P + 1800 = 100 P^2$$

$$\therefore P^2 - 3 P - 18 = 0 \quad \dots\dots ⑨$$

を得る。

⑨式を因数分解すると、このときのPの値を求めることができる。

$$(P-6)(P+3) = 0$$

$$\therefore P = 6 \quad (\text{答}) \quad (\because P > 0) \quad \dots\dots ⑩$$

⑩式を⑧式に代入

$$Y = 100 \times 6 = 600 \quad (\text{答})$$

(4) まず, ⑪式および⑬式より, e を消去する。⑬式の両辺を 2 倍すると,

$$2r = 0.02Y - 0.1e + 6 \quad \cdots \cdots \text{⑭}$$

となる。⑪式と⑭式を足し合わせると,

$$3r = -0.02Y + 16 \quad \cdots \cdots \text{⑮}$$

となる。次に, ⑫式と⑮式を連立し, Y と r について解く。⑫式と⑮式を足し合わせると,

$$4r = 8$$

$$\therefore r = 2$$

と求められる。 $r = 2$ を⑫式 (または⑮式) に代入して整理することにより, Y が,

$$Y = 500$$

と求められる。さらに, $r = 2$, $Y = 500$ を⑪式 (または⑬式) に代入して整理することにより, e が,

$$e = 120$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad Y = 500 \quad r = 2 \quad e = 120$$

【注】上記問題の(1)は, ミクロ経済学・不完全競争の分野における複占モデルにおけるクールノー均衡の計算例, (2)は, ミクロ経済学・消費者理論における需要関数の計算例, (3)は, マクロ経済学・総需要－総供給分析における均衡の計算例である。(4)は, マクロ経済学の IS－LM－BP 分析において, 国際収支の均衡に対応する BP 曲線が右上がりの場合の均衡の計算例である。

5 微分の計算

関数 $y = f(x)$ を x で微分するとは、曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きを求めることを意味する。経済学では、微分した結果を、「限界～」と呼ぶ。例えば、「限界費用MC」とは「微分した費用（費用関数を生産量で微分したもの）」であり、 $MC(x) = \frac{dC(x)}{dx}$ と表現される。

$C(x)$: 費用関数, x : 生産量

(1) n 乗の微分

$y = ax^n$ を微分すると、 $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$ となる。なお、微分記号 $\frac{dy}{dx}$ は y' と表現されるので、 $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$ は、 $y' = nax^{n-1}$ と示すことができる。

$$\ll \text{例} \gg \quad y = 2x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \times 2x^{3-1} = 6x^2$$

(2) 和の微分

$y = ax^n + bx^m$ を微分すると、 $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} + mbx^{m-1}$ となる。

$$\ll \text{例} \gg \quad y = 2x^3 + 4x^5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3 \times 2x^{3-1} + 5 \times 4x^{5-1} = 6x^2 + 20x^4$$

(3) 定数の微分

$y = a$ (定数) を微分すると、 $\frac{dy}{dx} = 0$ となる。

【練習問題】

次の関数を $f(x)$ を x について微分しなさい。

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 10x + 20$

(2) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$

【解答】

(1) $f'(x) = x^2 - 10x + 10$ (答)

(2) $f'(x) = \frac{2}{3} \times 3x^{-\frac{1}{3}} = 2x^{-\frac{1}{3}}$ (答)

6 偏微分の計算

変数が2変数以上ある場合に、あるひとつの変数のみで微分することを偏微分するという。

(1) n乗の偏微分

$u = a x^n y^m$ を x で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial x} = n a x^{n-1} y^m$ となる。

$u = a x^n y^m$ を y で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial y} = m a x^n y^{m-1}$ となる。

《例》 $u = 2 x^3 y^5 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \times 2 x^{3-1} y^5 = 6 x^2 y^5$

$u = 2 x^3 y^5 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 5 \times 2 x^3 y^{5-1} = 10 x^3 y^4$

(2) 和の偏微分

$u = a x^n y^m + b x^r y^s$ を x で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial x} = n a x^{n-1} y^m + r b x^{r-1} y^s$ となる。

$u = a x^n y^m + b x^r y^s$ を y で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial y} = m a x^n y^{m-1} + s b x^r y^{s-1}$ となる。

《例》 $u = 2 x^3 y^5 + 4 x^2 y^3$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 3 \times 2 x^{3-1} y^5 + 2 \times 4 x^{2-1} y^3 = 6 x^2 y^5 + 8 x y^3$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 5 \times 2 x^3 y^{5-1} + 3 \times 4 x^2 y^{3-1} = 10 x^3 y^4 + 12 x^2 y^2$

(3) 定数の偏微分

$u = a$ (定数) を x で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ となる。

$u = a$ (定数) を y で偏微分すると、 $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ となる。

【練習問題】

次の関数 $f(x, y)$ について、それぞれ $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を計算しなさい。

(1) $f(x, y) = x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

(2) $f(x, y) = x^a y^b$ (a, b は正の定数)

(3) $f(x, y) = 4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - 3x - 4y$

(4) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

【解答】

(1) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ (答), $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$ (答)

(2) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = a x^{a-1}y^b$ (答), $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = b x^a y^{b-1}$ (答)

(3) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}} - 3$ (答), $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}} - 4$ (答)

(4) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$ (答),

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + 3y^2$ (答)

7 指数の計算

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

《例》 $2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$ $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1+3}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$

(2) $a^m \div a^n = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

《例》 $2^4 \div 2^2 = 2^{4-2} = 2^2$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

《例》 $(2^4)^2 = 2^{4 \times 2} = 2^8$

(4) $(a \ b)^m = a^m b^m$

《例》 $(a \ b)^2 = a^2 b^2$

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

《例》 $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

(6) $a^0 = 1$

《例》 $x^0 = 1$

(7) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

《例》 $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

(8) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

《例》 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

(9) $\frac{a^{-m} \times b^n}{a^m \times b^{-n}} = \frac{b^n \times b^n}{a^m \times a^m} = \frac{b^{n+n}}{a^{m+m}} = \frac{b^{2n}}{a^{2m}}$

《例》
$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \times y^{-\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{y^{\frac{2}{2}}}{x^{\frac{2}{2}}} = \frac{y}{x}$$

【練習問題】

以下の各式の空欄 [ア] ～ [キ] を埋めなさい。

$$(1) \sqrt{a\sqrt{a}} = a^{[\text{ア}]}$$

$$(2) \sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{a^2}} = a^{[\text{イ}]}$$

$$(3) \frac{x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}} = \frac{x^{[\text{ウ}]} }{y^{[\text{エ}]}}$$

$$(4) \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{[\text{オ}]y^{[\text{カ}]}}{x^{[\text{キ}]}}$$

【解答】

$$(1) \sqrt{a\sqrt{a}} = \left(a \times a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{4}} \quad (\text{答}) \text{ ア. } \frac{3}{4}$$

$$(2) \sqrt{\frac{a\sqrt{a}}{a^2}} = \left(a \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \quad (\text{答}) \text{ イ. } \frac{1}{2}$$

$$(3) \frac{x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{4}{3}}}{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{5}{3}}} = \frac{x^{\frac{4}{3} \times \frac{2}{3}}}{y^{\frac{4}{3} \times \frac{5}{3}}} = \frac{x^2}{y^3} \quad (\text{答}) \text{ ウ. } 2 \quad \text{エ. } 3$$

$$(4) \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{3}{4}}} = \frac{2y^{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}} = \frac{2y}{x} \quad (\text{答}) \text{ オ. } 2 \quad \text{カ. } 1 \quad \text{キ. } 1$$

8 平方根と立方根

$\sqrt{x}$ とは、2乗して x になる（正の）ものであり、 x の（正の）平方根という。

《例》 $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt[3]{x}$ とは、3乗して x になる（正の）ものであり、 x の（正の）立方根という。

《例》 $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$

9 無限等比級数の和

無限等比級数の和 = $\frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}}$

例 $\frac{\alpha}{1+r} + \frac{\alpha}{(1+r)^2} + \frac{\alpha}{(1+r)^3} + \dots$

$$= \frac{\frac{\alpha}{1+r}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{\frac{\alpha}{1+r} \times (1+r)}{\left(1 - \frac{1}{1+r}\right) \times (1+r)} = \frac{\alpha}{1+r-1} = \frac{\alpha}{r}$$

初項 = $\frac{\alpha}{1+r}$, 公比 = $\frac{1}{1+r}$

MEMO	平方根と立方根	8
------	---------	---

「 $\sqrt{x}$ 」は、 x の平方根を意味する。また、 $\sqrt[3]{x}$ は、 x の立方根を意味する。 $\sqrt{x}$ は、 x の正の平方根を意味する。 $\sqrt[3]{x}$ は、 x の正の立方根を意味する。

$$\sqrt{16} = 4, \sqrt{9} = 3, \sqrt{4} = 2, \sqrt{1} = 1$$

「 $\sqrt{x}$ 」は、 x の平方根を意味する。また、 $\sqrt[3]{x}$ は、 x の立方根を意味する。 $\sqrt{x}$ は、 x の正の平方根を意味する。 $\sqrt[3]{x}$ は、 x の正の立方根を意味する。

$$\sqrt{16} = 4, \sqrt{9} = 3, \sqrt{4} = 2, \sqrt{1} = 1$$

無限等比級数の和	e
----------	---

無限等比級数の和

$$\frac{a}{1-r} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{1-r} &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \\ \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots - (a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots) \\ \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} &= a - a + ar - ar + ar^2 - ar^2 + ar^3 - ar^3 + \dots \\ \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} &= 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\ \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} &= 0 \end{aligned}$$

Ⅱ 応用編

1 2次方程式の因数分解による解法 (x^2 の係数が1ではないケース)

因数分解 (x^2 の係数が1でないケース)

$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ より, 掛け合わせると x^2 の係数になる2つの数, および掛け合わせると定数項になる2つの数をそれぞれ選び, 符号に注意しつつ, たすきがけて足し合わせた数値が x の係数になるようにする。

$$\begin{array}{r} a \quad \quad b \quad \quad \text{---} \quad bc \\ c \quad \quad d \quad \quad \text{---} \quad ad \quad (+) \\ \hline ac \quad \quad bd \quad \quad ad + bc \end{array}$$

例. $2x^2 + 11x + 15 = (x + 3)(2x + 5)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad 3 \quad \quad \text{---} \quad 6 \\ 2 \quad \quad 5 \quad \quad \text{---} \quad 5 \quad (+) \\ \hline 2 \quad \quad 15 \quad \quad 11 \end{array}$$

$2x^2 - x - 15 = (x - 3)(2x + 5)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \quad -3 \quad \quad \text{---} \quad -6 \\ 2 \quad \quad 5 \quad \quad \text{---} \quad 5 \quad (+) \\ \hline 2 \quad \quad -15 \quad \quad -1 \end{array}$$

【練習問題】

次の2次方程式を解きなさい。

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

【解答】

$$2x^2 + 3x - 2 = (x + 2)(2x - 1) = 0 \quad \therefore x = -2, \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 4 \\ 2 \quad -1 \quad -1 \quad (+) \\ \hline 2 \quad -2 \quad 3 \end{array}$$

2 2次関数のグラフと平方完成

2次関数のグラフ（放物線）の頂点の座標を求めるために用いられるのが平方完成である。平方完成は、

- ① x^2 の係数が1でない場合には、その係数で x^2 の項および x の項をくくる。
- ② $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$ （複号同順）という関係を利用して、 x の項の係数を2で割った値を用いて $(x \pm a)^2$ という形の式を作る。
- ③ $(x \pm a)^2$ のままだと、 $x^2 \pm 2ax + a^2$ の最後の項の“ $+a^2$ ”が余計なので、その分を引く。なお、そのとき x^2 の係数が1でない場合には、引くときにその係数を掛けるのを忘れないようにする。
- ④ 定数項を整理する。

というプロセスで計算される。

また、平方完成を行うことにより、2次関数が

$$y = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

の形になったとき、その2次関数のグラフ（放物線）の頂点の座標は (p, q) となる。

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは、

$y = ax^2$ のグラフを、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した放物線のグラフ

であり、

$a > 0$ のとき下に凸、 $a < 0$ のとき上に凸

となる。

平方完成と頂点の求め方の例

$$y = x^2 - a x + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

$$\therefore \text{頂点の座標は} \left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$$

$$y = a x^2 - b x + c = a \left(x^2 - \frac{b}{a} x\right) + c$$

$$= a \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$= a \left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$\therefore \text{頂点の座標は} \left(\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

平方完成を行うと、 $y = a(x - p)^2 + q$ (0 ≠ a) の形になる。

$$y = a(x - p)^2 + q \quad (0 \neq a)$$

このとき、 (p, q) は頂点の座標である。また、 $a > 0$ のときは下に凸、 $a < 0$ のときは上に凸である。

$$y = a(x - p)^2 + q$$

$$y = a(x - p)^2 + q \quad (a > 0 \text{ のときは下に凸、} a < 0 \text{ のときは上に凸})$$

$$a > 0 \text{ のときは下に凸、} a < 0 \text{ のときは上に凸}$$

【練習問題】

〔問1〕 次の2次関数により表される曲線の頂点の座標を求めなさい。

(1) $y = x^2 - 4x + 10$

(2) $y = -x^2 + 5x - 2$

(3) $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は定数, $a \neq 0$)

〔問2〕 次の2次関数により表される曲線のグラフを, (x, y) 平面上に描きなさい。

(1) $y = x^2 - 4x + 10$

(2) $y = -x^2 + 5x - 2$

【解答】

〔問1〕

(1) $y = x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 - 4 + 10 = (x - 2)^2 + 6$

∴頂点の座標は(2, 6) (答)

(2) $y = -x^2 + 5x - 2 = -(x^2 - 5x) - 2$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{25}{4}\right) - 2$$

$$= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

∴頂点の座標は $\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$ (答)

(3) $y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \frac{b^2}{4a^2} + c$$

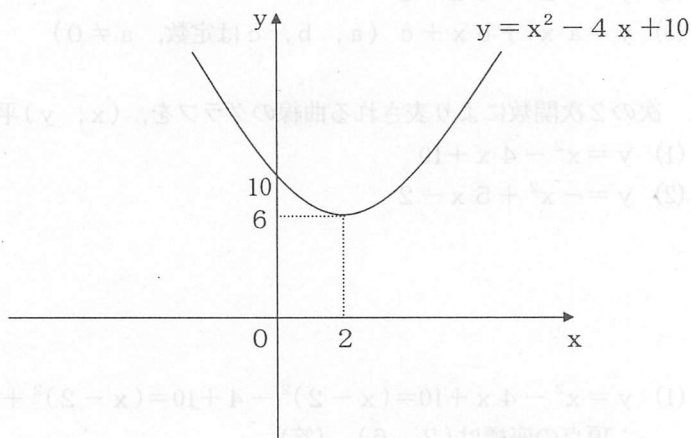
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right)$$

∴頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right)$ (答)

〔問2〕

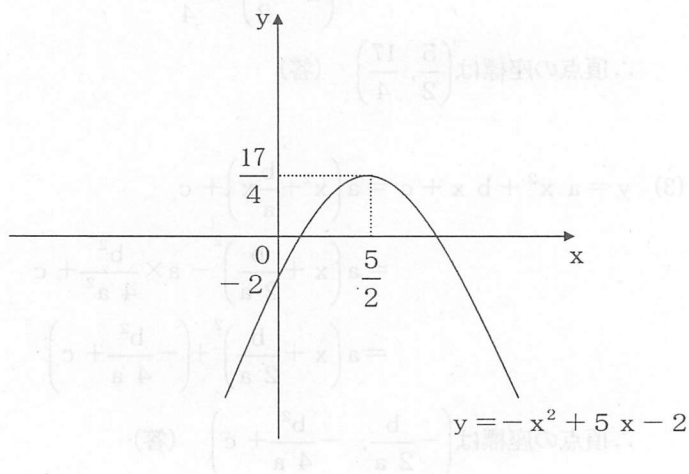
$$(1) y = x^2 - 4x + 10 = (x - 2)^2 + 6$$

(答)



$$(2) y = -x^2 + 5x - 2 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

(答)



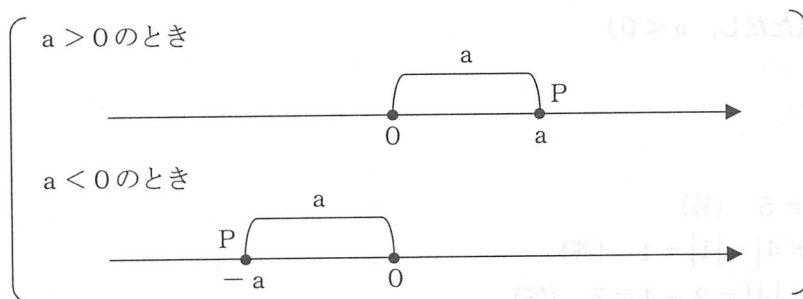
3 絶対値と平方根

(1) 絶対値

数直線上で、原点(0)と、点P(a)の間の距離を、実数aの絶対値といい、記号 $|a|$ で表す。 $|a|$ は、

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。



(2) 平方根

2乗するとaになる数を、aの平方根(2乗根)という。正の数のaの平方根は2つあり、絶対値が等しく符号が異なる。正の平方根を $\sqrt{a}$ 、負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表す。これらはまとめて、 $\pm\sqrt{a}$ と表現される。

$\sqrt{a^2}$ の扱いには注意が必要で、

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。すなわち、 $\sqrt{a^2} = |a|$ である。

平方根については、

$a > 0, b > 0, k > 0$ のとき、

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

といった諸性質が成立する。

【練習問題】

〔問1〕 次の値を求めなさい。

- (1) $|-5|$
- (2) $|-3+4|$
- (3) $|-3|+|4|$

〔問2〕 次の(1), (2)については値を求め, (3)については根号がつかない形にしない。

- (1) $\sqrt{(-6)^2}$
- (2) $\sqrt{12}$
- (3) $\sqrt{a^2}$ (ただし, $a < 0$)

【解答】

- 〔問1〕 (1) $|-5| = 5$ (答)
- (2) $|-3+4| = |1| = 1$ (答)
- (3) $|-3|+|4| = 3+4 = 7$ (答)

- 〔問2〕 (1) $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$ (答)
- (2) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$ (答)
- (3) $a < 0$ であるから, $\sqrt{a^2} = |a| = -a$ (答)

4 積の微分と商の微分の公式

・積の微分の公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

・商の微分の公式

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

【練習問題】

積の微分および商の微分の公式を用いて、次の関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ $\left(= \frac{d f(x)}{d x}\right)$ を

計算しなさい。

(1) $f(x) = (x^2 + 2)(x + 5)$

(2) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 5}$

【解答】

(1) $f'(x) = 2x \times (x + 5) + (x^2 + 2) \times 1 = 3x^2 + 10x + 2$ (答)

(2) $f'(x) = \frac{2x(x + 5) - (x^2 + 2) \times 1}{(x + 5)^2} = \frac{x^2 + 10x - 2}{(x + 5)^2}$ (答)

5 合成関数の微分

$z = f(y)$ および $y = g(x)$ という 2 つの関数が与えられているとき、 z を x の関数として表した $z = f(y) = f(g(x))$ を合成関数とよぶ。

例. $z = f(y) = \sqrt{y}$, $y = g(x) = x^2 + 1$ のとき,

$$z = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 1}$$

は合成関数である。

・合成関数の微分の公式

$z = f(y) = f(g(x))$ のとき,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot g'(x)$$

例. $z = f(y) = \sqrt{y}$, $y = g(x) = x^2 + 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = f'(y) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

【練習問題】

合成関数の微分の公式を用いて、以下の計算をなさい。

(1) $f(x) = (x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}}$ を x で微分しなさい。

(2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x}}$ を x で微分しなさい。

(3) $f(x, y) = (x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ (ただし $\rho \neq 0$, $\rho < 1$) に関して, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ を計算しなさい。

【解答】

(1) $f'(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 3x^2 = -\frac{3}{2}x^2(x^3 + 2)^{-\frac{3}{2}}$ (答)

(2) $f'(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 4) = -(x + 2)(x^2 + 4x)^{-\frac{3}{2}}$ (答)

(3) $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{\rho}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \rho x^{\rho-1} = x^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}$ (答)

$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{\rho}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1} \cdot \rho y^{\rho-1} = y^{\rho-1}(x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}-1}$ (答)

6 等比数列と無限等比級数

(1) 等比数列の一般項 (a_n)

初項が a 、公比が r である等比数列を $a_1, a_2, a_3, \dots$ とおくと、

$$a_1 = a, a_2 = ar, a_3 = ar^2, \dots$$

となる。したがって、この数列の一般項 (第 n 項) a_n は、

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表される。

(2) 等比数列と漸化式 (ぜんかしき)

公比が r である等比数列の第 n 項 (a_n) と第 $(n-1)$ 項 (a_{n-1}) の間には、

$$a_n = r \times a_{n-1}$$

という関係式が成立する。上式で示されるような関係式は、(隣接二項間) 漸化式とよばれる。このような漸化式と初項 a が与えられれば、数列の一般項 (第 n 項) a_n が、

$$a_n = ar^{n-1} \text{ と表される。}$$

(3) 等比数列の初項から第 n 項までの和 (S_n)

初項が a 、公比が r である等比数列 (ただし $r \neq 1$) の初項から第 n 項までの和を S_n とおくと、

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a + ar + \dots + ar^{n-1}$$

となる。

このとき、 $S_n - rS_n = (1-r)S_n$ を計算すると、

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a + \cancel{ar} + \dots + \cancel{ar^{n-1}} \\ -) \quad rS_n & = & \cancel{ar} + \cancel{ar^2} + \dots + \cancel{ar^{n-1}} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n & = & a - ar^n = a(1-r^n) \end{array}$$

となることから、 $r \neq 1$ より、

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を得る。

(4) 無限等比級数

初項が a ，公比が r である等比数列を初項から無限に加えていった

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を無限等比級数とよび、

$|r| < 1$ ($-1 < r < 1$) のとき、この無限等比級数は収束して、

$$\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1-r}$$

$|r| \geq 1$ ($r \leq -1$, $r \geq 1$) のとき、この無限等比級数は発散

となる。

【練習問題】

以下の設問に答えなさい。

- (1) 初項が5, 公比が2である等比数列の一般項 (a_n) および初項から第 n 項までの和 (S_n) を求めなさい。
- (2) 無限等比級数 $\sum_{i=1}^{\infty} c^{i-1} = 1 + c + c^2 + \dots$ が収束するために, c が満たすべき条件を求めなさい。また, 収束する場合にはどのような値に収束するかを示しなさい。

【解答】

- (1) 初項が5, 公比が2である等比数列の一般項 (a_n) は,

$$a_n = 5 \times 2^{n-1} \quad (\text{答})$$

となる。また, 初項から第 n 項までの和 (S_n) は,

$$S_n = \frac{5 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 5 \times (2^n - 1) \quad (\text{答})$$

となる。

- (2) 題意の無限等比級数は, 初項が1, 公比が c となっている。したがって, その収束条件は,

$$|c| < 1 \quad (-1 < c < 1) \quad (\text{答})$$

である。また, この収束条件が満たされている場合, 題意の無限等比級数は,

$$\sum_{i=1}^{\infty} c^{i-1} = 1 + c + c^2 + \dots + c^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - c}$$

と求められる。

(注) なお, この無限等比級数は, 閉鎖経済で租税が一括固定額税のケースの45度線分析において, 独立投資, 政府支出等の自律的需要が1だけ増加した場合の均衡国民所得の増加分 (ΔY^*) に相当する。この場合, 限界消費性向 c が $0 < c < 1$ の範囲をとると仮定されることから, 収束条件は満たされている。

* * MEMO *

不動産鑑定士試験講座
経済数学入門レジュメ

2016年4月5日 初版第2刷発行
2017年9月19日 初版第3刷発行

編 者 T A C (株) 経済学研究会
発 行 者 斎 藤 博 明
発 行 所 T A C 株式会社 教育事業部
〒101-8383
東京都千代田区三崎町3-2-18

印刷・製本 株式会社 日 興 印 刷

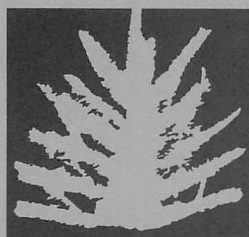
落丁・乱丁本はお取り替えいたします。

本書は、「著作権法」によって、著作権等の権利が保護されている著作物です。本書の全部または一部につき、無断で転載、複写されると、著作権等の権利侵害となります。上記のような使い方をされる場合には、あらかじめ小社宛許諾を求めてください。

不動産鑑定士

経済学

経済数学入門レジュメ



TAC



1266203108038